CAPÍTULO V

SÉRIES DE POTÊNCIAS DE TERMOS REAIS

1. Estudo da Convergência

Chama-se *série de potências* a uma série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(x-a)^{p_n}$, em que x e a são reais, a_n é o termo geral de uma sucessão real e p_n é o termo geral de uma sucessão estritamente crescente de números inteiros não negativos . Quando seja $p_1 = 0$, convenciona-se por conveniência de notação que o primeiro termo da série é a_1 , mesmo para $x = a$.

Uma série de potências é absolutamente convergente para $x = a$, pois todos os seus termos ficam nulos, pelo menos a partir do segundo. Vamos ver que quando convirja para certo $x_1 = a + r$ $(r \neq 0)$, a série é absolutamente convergente para todos os valores de $x \in \,]\, a - |\,r\,| \;,\; a + |\,r\,|\,[$. Com efeito, para $x_1 = a + r$ o termo geral da série reduz-se a $a_n \,.\, r^{p_n}$ e, em caso de convergência da série, tem-se $lim\ a_n \,.\, r^{p_n} = 0$, donde resulta que $|\,a_n \,.\, r^{p_n}\,| < 1$ de certa ordem em diante, digamos para $n > n_1$. Tomando um qualquer $x \in \,]\, a - |\,r\,| \;,\; a + |\,r\,|\,[$, tem-se $|\,x - a\,| < |\,r\,|$ e, portanto, $0 < k = |\,x - a\,| \,/\, |\,r\,| < 1$; para $n > n_1$ tem-se então,

$$|\,a_n \,.(x-a)^{p_n}\,| = |\,a_n \,.\, r^{p_n}\,| \,.\, \frac{|x-a|^{p_n}}{|r|^{p_n}} < k^{p_n} \le k^{n-1} \,,$$

e da convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1}$ (série geométrica com $0 < k < 1$) resulta a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |\,a_n\,(x-a)^{p_n}\,|$ (série de termos menores), sendo portanto absolutamente convergente a série de potências.

Do que antecede resulta que se a série de potências converge para todos os $x \in \mathbf{R}$, a convergência é necessariamente absoluta, não pode ser simples.

O resultado antecedente permite ainda provar que se a série de potências converge para $x_1 = a + r$ $(r \neq 0)$ e diverge para $x_2 = a + s$ com $|\,s\,| > |\,r\,|$, então existe um real $\lambda > 0$ tal que a série é absolutamente convergente para $x \in \,]\, a - \lambda \;,\; a + \lambda\,[$ e divergente para $x < a - \lambda$ e para $x > a + \lambda$. Senão vejamos :

a) O conjunto A dos reais positivos α tais que a série de potências é absolutamente convergente para todos os $x \in]\, a - \alpha \;,\; a + \alpha\,[$ é um conjunto não vazio, pois pelo menos $|\,r\,| \in A$. E trata-se de um conjunto majorado por $|\,s\,|$ pois se certo $\alpha \in A$ excedesse $|\,s\,|$, a série dada seria convergente para $x_2 = a + s \in \,]\, a - \alpha \;,\; a + \alpha\,[$, contrariamente à hipótese admitida.

b) Existe portanto o real $\lambda = Sup\ A > 0$ e vamos mostrar que a série é absolutamente convergente para $x \in]\, a - \lambda \ ,\ a + \lambda\, [$:

i) Dado um qualquer $x \in [\, a \ ,\ a + \lambda\, [$ tem-se $0 \leq x - a < \lambda$ e por definição de supremo existe um $\alpha \in A$ tal que $0 \leq x - a < \alpha < \lambda$; a série é então absolutamente convergente para $x \in [\, a \ ,\ a + \alpha\, [\ \subset\ ]\, a - \alpha \ ,\ a + \alpha\, [$;

ii) Sendo $x \in]\, a - \lambda \ ,\ a\, [$, tem-se $x' = a + (a - x) \in]\, a \ ,\ a + \lambda\, [$ e tendo em conta o resultado de i) conclui-se que a série de potências é absolutamente convergente para $x' = a + (a - x)$; e como $| a_n .(x' - a)^{p_n} | = | a_n .(x - a)^{p_n} |$ resulta que a série também converge absolutamente para $x \in]\, a - \lambda \ ,\ a\, [$.

c) A série diverge para $x < a - \lambda$ e para $x > a + \lambda$. De facto, se a série fosse convergente para $x = a + \beta$ com $| \beta | > \lambda$, a série seria absolutamente convergente para todos os $x \in]\, a - | \beta | \ ,\ a + | \beta |\, [$ e então ter-se-ia $| \beta | \in A$ e tal seria contrário ao facto de ser λ o supremo de A .

Sumariando as conclusões precedentes, pode concluir-se que para uma série de potências podem ocorrer as seguintes possibilidades :

1) Convergência absoluta apenas para $x = a$;
2) Convergência absoluta para todos os $x \in]\, -\infty \ ,\ +\infty\, [$;
3) Convergência absoluta para todos os $x \in]\, a - \lambda \ ,\ a + \lambda\, [$, com certo $\lambda > 0$ e divergência para $x < a - \lambda$ e para $x > a + \lambda$.

No caso 3) a série de potências pode ainda ser absolutamente convergente nas extremidades $a \pm \lambda$ do intervalo, sendo que se o for numa delas também o é na outra porque às séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, \lambda^{p_n}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, (-\lambda)^{p_n}$ corresponde a mesma série dos módulos.
Ainda no caso 3) , não havendo convergência absoluta nas extremidades do intervalo, pode haver convergência simples numa delas ou em ambas.

Representando por I e I_0 respectivamente os intervalos dos valores de x que tornam a série de potências convergente e absolutamente convergente , têm-se as seguintes possibilidades :

Caso 1 : $I = I_0 = [a \ ,\ a]$;
Caso 2 : $I = I_0 =]\, -\infty \ ,\ +\infty\, [$;
Caso 3 : Há cinco possibilidades : $I = I_0 =]\, a - \lambda \ ,\ a + \lambda\, [$; $I = I_0 = [\, a - \lambda \ ,\ a + \lambda\,]$;
$I_0 =]\, a - \lambda \ ,\ a + \lambda\, [\ \subset\ I = [\, a - \lambda \ ,\ a + \lambda\, [$;
$I_0 =]\, a - \lambda \ ,\ a + \lambda\, [\ \subset\ I =]\, a - \lambda \ ,\ a + \lambda\,]$;
$I_0 =]\, a - \lambda \ ,\ a + \lambda\, [\ \subset\ I = [\, a - \lambda \ ,\ a + \lambda\,]$;

Na prática o estudo da convergência das séries de potências faz-se sem grande dificuldade aplicando à série dos módulos o critério de Cauchy ou de D'Alembert , complementados eventualmente com outros critérios para estudar a série nas extremidades do intervalo de convergência , como se ilustra nos exemplos seguintes :

1) Para a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n . (x-1)^{n-1}$, tem-se,

$$lim \sqrt[n]{n^n . |x-1|^{n-1}} = | x -1| . lim\ n = \begin{cases} 0 & , x = 1 \\ +\infty & , x \neq 1 \end{cases} ,$$

e portanto a série apenas converge para $x = 1$: $I = I_0 = [a , a]$

2) Dada a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n}}{n}$, tem-se,

$$lim \frac{|x|^{2n+2} / (n+1)}{|x|^{2n} / n} = |x|^2 . lim \frac{n}{n+1} = |x|^2,$$

podendo portanto concluir-se que : **a)** Para $x \in I_0 =] -1 , 1 [$, a série é absolutamente convergente ; **b)** Para $x \in] -\infty , -1 [\cup] 1 , +\infty [$, a série diverge ; **c)** Para $x = -1$ e $x = 1$, obtém-se em ambos os casos a série simplesmente convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n . 1/n$, sendo portanto $I = [-1 , 1]$ o intervalo de convergência da série.

2. Exercícios

1 - Estude a convergência das seguintes séries de potências de termos reais:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n . (n+1)!}{2 . 4 . 6 . \cdots . (2n)} \cdot x^{n+1}$; **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$; **c)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{3^n + 1}$; **e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+a)^n}{a^{n+1}}$ $(a \neq 0)$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(5x+1)^{2n}}{n^2 + 1}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [log(1 + 1/n)] . x^n$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(2n)!} \cdot x^n$; **i)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2x-1)^n}{n}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1 + 1/n} - 1) .(log\ x)^n$; **k)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot (x-1)^{2n}$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n + 4}{n(n+1)(n+2)} \cdot (x-2)^n$; **m)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{a^n}{n} + \dfrac{b^n}{n} \right) . x^n$ $(a , b > 0)$.

2 - Prove que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) . x^n$, com $a_n \geq a_{n+1}$ e $lim\ a_n = a$ finito, é absolutamente convergente pelo menos no intervalo $[-1 , 1]$.

3 - Determine a de forma que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^{n+1}}{n+1} \cdot x^n$ seja convergente em $x = -3$ e divergente em $x = 3$.

4 - Sendo a um parâmetro real , determine o intervalo de convergência da série real de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+a^{2n}}$.

5* - Estude a convergência das seguintes séries de potências de termos reais:

a) $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}$ (com $\alpha \neq 0 , 1 , 2 , \ldots$) ;

b) $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}{(n-1)!} \cdot \dfrac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-2)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-2)} \cdot x^{n-1}$,

(com $\alpha , \beta , \gamma \neq 0 , -1 , -2 , \ldots$) .

RESPOSTAS

1 - **a)** Absolutamente convergente em] -2 , 2 [; **b)** Absolutamente convergente em $\mathbf{R}$;
c) Absolutamente convergente em] -1 , 1 [, simplesmente convergente em $x = -1 , 1$;
d) Absolutamente convergente em] -2 , 4 [;
e) Absolutamente convergente em $] -a - |a| , -a + |a| [$;
f) Absolutamente convergente em [-2/5 , 0] ;
g) Absolutamente convergente em] -1 , 1 [, simplesmente convergente em $x = -1$;
h) Absolutamente convergente em $\mathbf{R}$;
i) Absolutamente convergente em] 0 , 1 [, simplesmente convergente em $x = 0$;
j) Absolutamente convergente em $] 1/e , e [$, simplesmente convergente em $x = 1/e$;
k) Absolutamente convergente em] -1 , 3 [; l) Absolutamente convergente em [1 , 3] ;
m) Com $a \geq b$, absolutamente convergente em $] -1/a , 1/a [$ e simplesmente convergente em $x = -1/a$; com $a < b$, absolutamente convergente em $] -1/b , 1/b [$ e simplesmente convergente em $x = -1/b$.

3 - 1/3 .

4 - Se $|a| \leq 1$, a série é absolutamente convergente em] -1 , 1[; se $|a| > 1$, a série é absolutamente convergente em $] -a^2 , a^2 [$.

5 - **a)** Se $\alpha > 0$, a série é absolutamente convergente em [-1 , 1] ; se $-1 < \alpha < 0$, a série é absolutamente convergente em] -1 , 1[e simplesmente convergente em $x = 1$; se $\alpha \leq -1$, a série é absolutamente convergente em] -1 , 1[;
b) Se $\gamma > \alpha + \beta$, a série é absolutamente convergente em [-1 , 1] ; se $\alpha + \beta - 1 < \gamma \leq \alpha + \beta$, a série é absolutamente convergente em] -1 , 1[e simplesmente convergente em $x = -1$; $\gamma \leq \alpha + \beta - 1$, a série é absolutamente convergente em] -1 , 1 [.