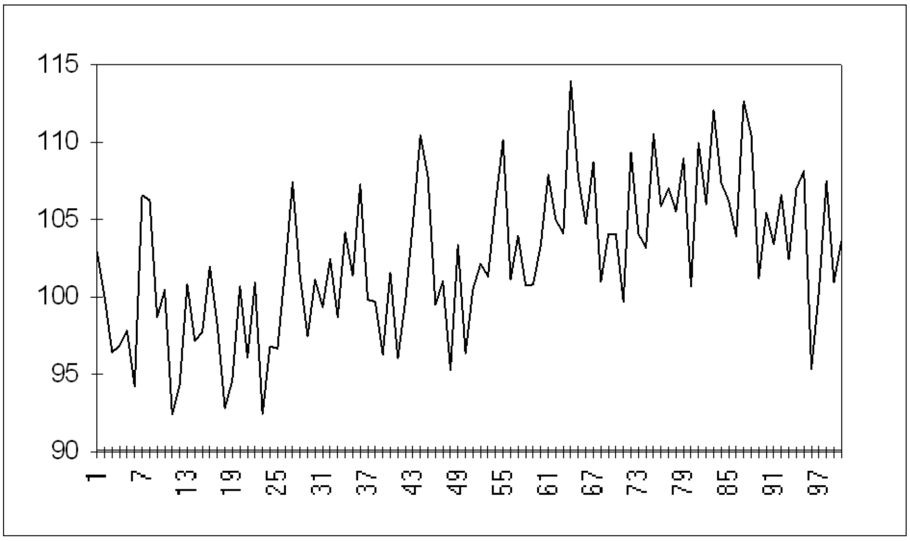
Alisamento Exponencial (EWMA) e Holt-Winters

1 - Alisamento Exponencial Simples

Admita-se que pretendemos prever os valores futuros da série representada no gráfico 1.

Gráfico 1



- esta série não apresenta uma tendência (nível médio) nitidamente ascendente ou descendente; pode ser vista como oscilando em torno de um ***nível "localmente constante"***. Este nível não é estável, vai evoluindo com o tempo!

- forma pragmática de previsão: estimar o nível da série no final da amostra, $\hat{a}_T$; projectar essa estimativa para o futuro.

Assim, a função de previsão adequada a séries deste tipo será:

$$\hat{Y}_{T+h} = \hat{a}_T \text{ , para } h = 1,2,...$$

Como estimar o nível da série ?

- como o nível da série vai evoluindo ao longo do tempo, utilizar estimadores que atribuam maior peso aos valores mais recentes da série.

- ***médias móveis***: apenas as últimas ***N*** observações são consideradas para obter as estimativas do nível actual da série.

- utilizando uma média ponderada de todas as observações: o ***alisamento exponencial simples*** constitui uma forma de obter estimativas deste tipo.

Admita-se que:

- no momento ***t-1*** dispomos de uma estimava do nível da série, $\hat{a}_{t-1}$;

- no momento ***t*** observamos o valor y_t e

- pretendemos actualizar a estimativa do nível.

- a nova estimativa poderá ser obtida como média ponderada de $\hat{a}_{t-1}$ e y_t utilizando o *estimador recursivo* :

$$\hat{a}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{a}_{t-1}, \text{ com } 0 < \alpha < 1 \ .$$

- este estimador é equivalente à utilização de uma *média móvel ponderada de todas as observações com pesos exponencialmente decrescentes*:

$$\hat{a}_t = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 y_{t-3} + \cdots$$

- o valor da constante de alisamento, α, vai determinar a rapidez com que a informação passada é descontada:

- valores elevados de α, no intervalo *(0,1)*, descontam a informação passada de forma rápida mas filtram pouco a componente irregular;

- valores baixos da constante de alisamento descontam a informação passada de forma mais lenta e filtram mais a componente irregular.

- para utilizar um estimador recursivo é necessário definir um valor inicial (*problema da inicialização*) para o nível da série na origem, $\hat{a}_0$, e concretizar o valor da constante de alisamento, α.

- o valor inicial, $\hat{a}_0$, poderá ser o valor da primeira observação disponível ou então a média de alguns valores iniciais.

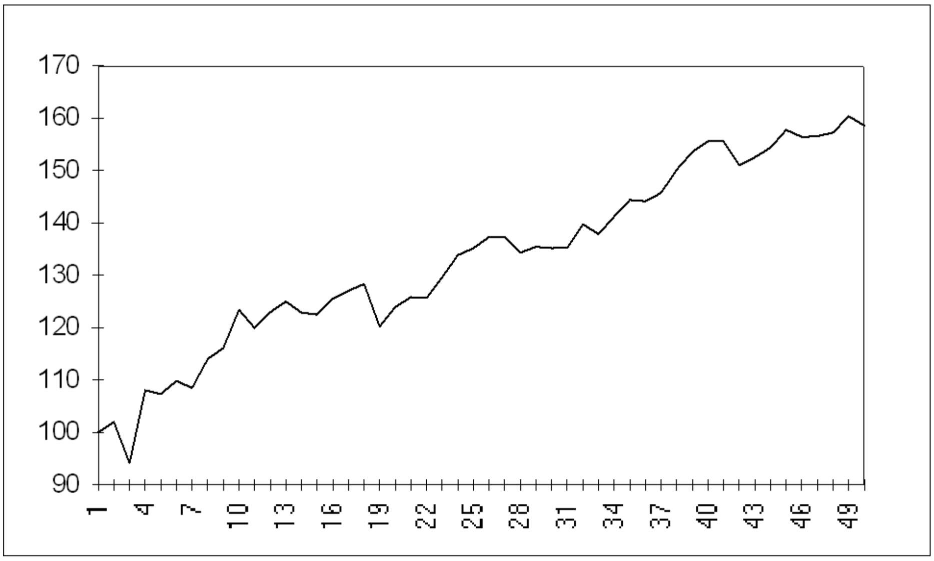
- o valor da constante de alisamento poderá ser definido pelo utilizador tendo em conta uma avaliação das características da série e o efeito dos diferentes valores da constante de alisamento;

- em alternativa, e preferencialmente, o valor da constante de alisamento será escolhido através da minimização de uma das funções dos erros de previsão na amostra.

2 - Método de Holt

Admita-se, agora, que pretendemos prever os valores de uma variável com comportamento semelhante ao exibido pela série representada no gráfico 2.

Gráfico 2



- a tendência não é exactamente linear mas para observações adjacentes a aproximação linear é satisfatória (***tendência "localmente" linear***).

- para a previsão de uma série com estas características precisamos de duas estimativas: uma estimativa do ***nível da tendência*** ($\hat{a}_T$) e uma estimativa do ***declive da tendência*** ($\hat{b}_T$) no final do período.

- função de previsão:

$$\hat{Y}_{T+h} = \hat{a}_T + \hat{b}_T . h \text{ , para } h = 1,2,...$$

Como obter $\hat{a}_T$ e $\hat{b}_T$?

- ***método de Holt*** - uma extensão do alisamento exponencial simples ao caso de séries com tendência:

$$\hat{a}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}), \text{ com } 0 < \alpha < 1$$

$$\hat{b}_t = \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{t-1}, \text{ com } 0 < \beta < 1 \ .$$

aspectos práticos:

- valores de inicialização, $\hat{a}_0$ e $\hat{b}_0$; podem ser obtidos a partir dos valores iniciais da série.

- valores para as constantes de alisamento, α e β; podem ser fixados minizando uma função dos erros de previsão a um passo na amostra.

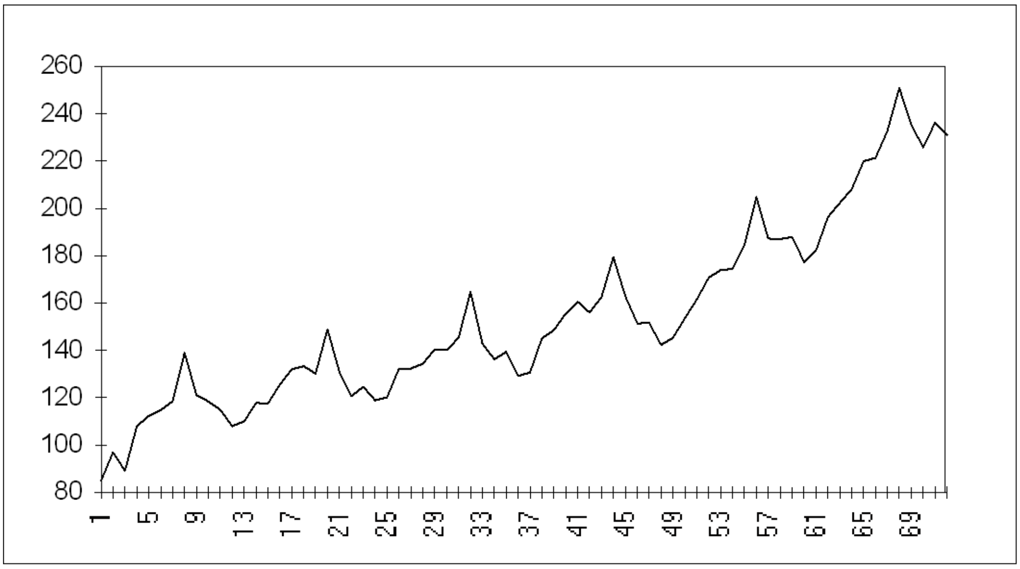
3 - Método de Holt-Winters

Para séries que apresentam ***tendência e componente sazonal***, possivelmente não determinística, o mesmo princípio da estimação recursiva pode ser utilizado na estimação dos factores sazonais. Como os padrões sazonais podem ser considerados aditivos ou multiplicativos são utilizadas duas variantes do método.

Método de Holt-Winters - Sazonalidade Aditiva

Para séries como as do gráfico 3, em que um modelo de componentes aditivas parece mais adequado, os estimadores das componentes e a função de previsão são:

Gráfico 3



Estimadores:

$$\hat{a}_t = \alpha(y_t - \hat{s}_{t-L}) + (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}), \text{ com } 0 < \alpha < 1$$

$$\hat{b}_t = \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{t-1}, \text{ com } 0 < \beta < 1$$

$$\hat{s}_t = \gamma(y_t - \hat{a}_t) + (1-\gamma)\hat{s}_{t-L} \text{ , com } 0 < \gamma < 1$$

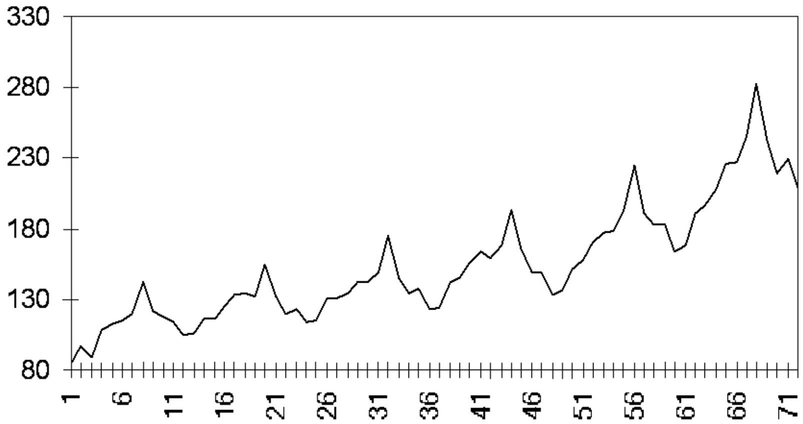
Função de Previsão: $\hat{Y}_{T+h} = \hat{a}_T + \hat{b}_T.h + \hat{s}_{T+h-kL}$,

para $h = 1,2,...$, e $k = 1$ para $h \leq L$, $k = 2$ para $L < h \leq 2L$ ...

Método de Holt-Winters - Sazonalidade Multiplicativa

Para séries como as do gráfico 4, em que um modelo de componentes multiplicativas parece mais adequado, os estimadores das componentes e a função de previsão são:

Gráfico 4



Estimadores:

$$\hat{a}_t = \alpha(y_t / \hat{s}_{t-L}) + (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}), \text{ com } 0 < \alpha < 1$$

$$\hat{b}_t = \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{b}_{t-1}, \text{ com } 0 < \beta < 1$$

$$\hat{s}_t = \gamma(y_t / \hat{a}_t) + (1-\gamma)\hat{s}_{t-L}, \text{ com } 0 < \gamma < 1$$

Função de Previsão: $\hat{Y}_{T+h} = (\hat{a}_T + \hat{b}_T .h).\hat{s}_{T+h-kL}$,

para $h = 1,2,...$, e $k = 1$ quando $h \le L$, $k = 2$ quando $L < h \le 2L$ ...

- quando a tendência é considerada localmente constante a equação relativa ao estimador do declive da tendência deixa de ser utilizada.

- necessário definir valores para inicializar a aplicação dos estimadores recursivos. Esses valores incluem estimativas iniciais para os factores sazonais.

- as constantes de alisamento a utilizar, α, β e γ, podem ser pesquisadas através da minimização de uma função dos erros de previsão a um passo na amostra.

4 – TENDÊNCIA AMORTECIDA (DAMPED TRENDS)

Em aplicações empíricas verificou-se que as previsões lineares fornecidas pelo método de Holt tendiam para a sobrestimação quando o horizonte da previsão aumentava. Gardner e McKenzie (1985) sugeriram a introdução de um parâmetro adicional que modera a extrapolação quando o horizonte aumenta. Esta sugestão parece adequada para séries como a do gráfico 5.

Gráfico 5

Para "amortecer" as extrapolações a função de previsão linear foi modificada através da introdução de um parâmetro ϕ que assume valores entre *0* e *1.* A função de previsão passa a ser:

$$\hat{Y}_{T+h} = \hat{a}_T + \hat{b}_T \sum_{j=1}^{h} \phi^j \text{ , para } h = 1,2,...$$

estimadores:

$$\hat{a}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\hat{a}_{t-1} + \phi \hat{b}_{t-1}) \text{, com } 0 < \alpha < 1$$

$$\hat{b}_t = \beta(\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}) + (1-\beta)\phi \hat{b}_{t-1} \text{, com } 0 < \beta < 1$$

O método pode ser visto como uma generalização dos padrões de extrapolação da tendência da metodologia do alisamento exponencial:

1) com $\phi = 0$ o método transforma-se no alisamento exponencial simples;

2) com $0 < \phi < 1$ a extraploção da tendência é amortecida e $\lim \hat{Y}_{T+h} = \hat{a}_T + \hat{b}_T (\frac{\phi}{1-\phi})$. Para valores baixos de ϕ a função de previsão final torna-se, rapidamente, praticamente constante.

3) com $\phi = 1$ temos o método de Holt.

4) com $\phi > 1$ as previsões tornam-se explosivas.