Fundamentos de Economia Financeira
Exercícios

Paulo Brito

16 de Abril de 2004

Incerteza e escolha

Questões de desenvolvimento

IE1 As funções de utilidade HARA (*hyperbolic absolute risk aversion*) têm a seguinte expressão geral

$$u(c) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\beta}{1-\gamma}c + \eta\right)^{\gamma}$$

em que $\gamma \neq 1$, $\beta > 0$ e $\frac{\beta}{1-\gamma}c + \eta > 0$ ou $\eta = 1$ se $\gamma = -\infty$. Estude o comportamento do consumidor representativo, implícito naquela função de utilidade

1. num ambiente de certeza
2. num amiente de incerteza.

Exercícios

IE2 Suponha que os estados da natureza são representado por um conjunto de probabilidades em que $\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ e a medida de probabilidades sobre ele é dada por uma função de densidade uniforme

$$f(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\overline{\omega}} & \text{se } \omega \in [0, \overline{\omega}], \quad \overline{\omega} > 0 \\ 0 & \text{se } \omega > \overline{\omega} \end{cases}$$

Suponha que as quantidades de consumo, x, a que um agente pode aceder é gerado por uma variável aleatória

$$x(\omega) = e^{-\lambda\omega}$$

com $\lambda > 0$. O consumidor avalia as quantidades (contingentes) de consumo com uma função von Neumann-Morgenstern em que a função de Bernoulli é do tipo

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad \gamma > 0.$$

1. Verifique se a função densidade $f(.)$ gera uma medida de probabilidades sobre Ω.

2. Determine a medida de probabilidades (μ_x), e a respectiva função de densidade (f_x), induzidas pela variável aleatória $x(.)$ sobre o seu contradomínio. Verifique se esta distribuição induzida é uma medida de probabilidades.

3. Determine o valor esperado e a variância de x.

4. Determine a função utilidade para o agente, em relação aos planos contingentes de consumo. Sugestão: assinale a sua dependência paramétrica em relação a $(\gamma, \lambda, \overline{\omega})$.

5. Estude a atitude em relação ao risco do agente, estudando as funções de Bernoulli e de von-Neumann Morgenstern.

6. Estude a dominância estocástica de primeira ordem da função vNM.

IE3 Suponha que o espaço dos estados da natureza é um espaço de probabilidades com dimensão finita $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ em que as probabilidades de ocorrência são $P(\omega_1) = P(\omega_3) = 0.25$, $P(\omega_2) = 0.1$, $P(\omega_5) = 0.3$ e $P(\omega_4) = 0.3$. Há um bem cujos consumos contingentes em relação aos estados da natureza, $c_i = c(\omega_i)$, são $c_1 = c_2 = 0.5$, $c_3 = 1$, $c_4 = c_5 = 2$.

1. determine a distribuição induzida em X pelo bem contingente;

2. determine a esperança matemática do consumo;

3. suponha que o consumidor tem uma função utilidade de Bernoulli do tipo $u = c$, quais as suas características implícitas;

4. suponha que o consumidor tem uma função utilidade de Bernoulli do tipo $u = \ln(c)$. Como a compararia com a anterior;

5. suponha o consumo apresent os valores $c_1^{'} = 0.5$, $c_2^{'} = 0.75$, $c_3^{'} = 1$, $c_4^{'} = 1.5$ e $c_5^{'} = 1.75$. Qual das duas distribuições o consumidor preferiria, admitindo as duas funções de utilidade anteriores ?

Tempo discreto: 2 períodos

Questões de desenvolvimento

2P1 Aborde de uma forma sucinta os seguintes temas:

1. Estrutura, definição e propriedades do equilíbrio na teoria do equilíbrio geral tradicional, na teoria do equilíbrio com mercados contingentes de Arrow-Debreu e teoria do equilíbrio em economias financeiras de Radner.

2. Ausência de oportunidades de arbitragem e preço dos estados da natureza.

3. Equilíbrio com mercados completos e incompletos: definição, características e intuição.

4. Função de utilidade von Neumann-Morgenstern, aversão ao risco, separabilidade aditiva e impaciência na teoria da preferência em contexto estocástico e intertemporal.

5. Hipóteses de ausência de oportunidades de arbitragem e completude dos mercados financeiros: definição e implicações na teoria do equilíbrio geral em economias financeiras.

6. Valorização dos activos financeiros com ausência de oportunidades de arbitragem e em equilíbrio, baseada no consumo.

7. Definir e discutir a existência de um *equity premium puzzle*.

Exercícios

2P2 Suponha os seguintes casos de economias financeiras , caracterizadas por um vector de preços dos activos financeiros e de pagamentos (em coluna estão os activos financeiros:

$$\text{caso 1: } q(0) = [1, 1, 0],\ V(1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.9 & 0.8 \\ 1 & 1.2 & 1.3 \\ 0.8 & 1.3 & 1.1 \end{bmatrix}$$

$$\text{caso 2: } q(0) = [1, 1, 1],\ V(1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.9 & 0.8 \\ 1 & 1.2 & 1.3 \\ 0.8 & 1.3 & 1.1 \end{bmatrix}$$

$$\text{caso 3: } q(0) = [1, 1, 0],\ V(1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.9 & 0.9 \\ 1 & 1.2 & 1.2 \\ 0.8 & 1.3 & 1.3 \end{bmatrix}$$

Para cada economia:

1. Verifique se há oportunidades de arbitragem.
2. Se houver ausência de oportunidades de arbitragem verifique se o mercado é completo.
3. Verifique a existência e unicidade de preços dos estados da natureza.
4. Demonstre que, quando há ausência de oportunidades de arbitragem, se verifica a equação de valorização.
5. Suponha que há uma opção *call* que pode ser exercida no momento 1, com o preço de exercício igual a 1. Determine o seu valor, nos casos em que há ausência de oportunidades de abitragem.

2P3 Admita uma economia de troca na qual a árvore de tempo-incerteza tem dois períodos e dois estados da natureza. Há apenas um bem, com dotações exógenas dadas por $y(0) = y_0$, para o momento inicial, e $y(1) := (y_1, y_2)$, para o momento terminal. Admita que todos os agentes têm preferências e probabilidades subjectivas de ocorrência dos dois estados da natureza iguais, sobre trajectórias de consumo $c := (c(0), c(1))$ em que $c(1) := (c_1, c_2)$. Admita que as preferências são caracterizadas por: uma função de utilidade intertemporalmente aditiva, com um factor de desconto intertemporal δ, por funções intratemporais do tipo von-Neumann-Morgenstern, e por funções de Bernoulli do tipo $u(c_j) = B - \frac{1}{b}\exp(-bc_j)$, com $b > 0$ e $B > \frac{1}{b}$.

1. Discuta as propriedades implícitas nas preferências atrás enunciadas.
2. Admita que na economia há uma estrutura de mercados para o bem do tipo Arrow-Debreu, em que os preços para as transacções *spot* são $p(0) := p_0$ e os associados às transacções nos mercados contingentes são $p(1) := (p_1, p_2)$. Suponha que não há incerteza idiossincrática, ou seja, que as dotações são iguais para todos os agentes. Note que a estrutura apresentada é equivalente à de uma economia em que só existe um agente representativo. Defina e determine o equilíbrio de Arrow-Debreu nesta economia. Comente os resultados obtidos.
3. Mantendo uma economia apenas com um agente representativo, suponha, agora, que a estrutura de mercados e contratos é a de uma economia financeira. Nesta economia há apenas mercados *spot* para o bem, funcionando em cada período, e há dois mercados de acções. A matriz dos pagamentos antecipados é

$$V := \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix}$$

em que v_{sj} é o pagamento do activo j no estado da natureza s; $q := (q_1, q_2)$ é o vector de preços de mercado para os activos financeiros. Suponha que nesta economia há não só expectativas correctas mas também racionais.

(a) Admitindo qualquer valor para $\det(V)$ defina o equilíbrio de Radner para a economia.

(b) Admitindo que $\det(V) = 0$, determine as expressões que caracterizam o equilíbrio de Radner para a economia supondo que $v_{21} = \epsilon v_{11}$ e $v_{12} = \epsilon v_{22}$, para $\epsilon > 0$ é dado. (Não tente determinar o equilíbrio) Comente os resultados obtidos.

(c) Admita que $\det(V) \neq 0$ e que há dois agentes com incerteza idiossincrática em relação às dotações futuras, de tal forma que $y_1^1 > y_1^2$ e $y_2^1 < y_2^2$, em que y_s^i corresponde à dotação, no período 1 para o agente $i = 1, 2$ no estado da natureza s. Determine o equilíbrio de Radner para esta economia e compare-o com o que encontrou na alínea b).

2P4 Admita uma economia de troca na qual a árvore de tempo-incerteza tem dois períodos e dois estados da natureza. Há apenas um bem, cujas dotações exógenas são denotadas por $y(0) = y_0$ para o momento inicial e $y(1) := (y_1, y_2)$ para o momento terminal. Suponha que não há incerteza agregada, mas há incerteza ideossincrática, em relação às dotações. Há apenas dois consumidores com preferências simétricas e probabilidades subjectivas de ocorrência dos dois estados da natureza iguais, definidos sobre trajectórias de consumo $c := (c(0), c(1))$ em que $c(1) := (c_1, c_2)$. Admita que os consumidores têm preferências simétricas representadas por: uma função de utilidade intertemporalmente aditiva, com um factor de desconto intertemporal δ; por funções intratemporais do tipo von-Neumann-Morgenstern; e por funções de Bernoulli do tipo $u(c_j) = ac_j - \frac{b}{2}(c_j)^2$, com $a > 0$ e $b > 0$.

Admita que na economia há uma estrutura de mercados do tipo Arrow-Debreu para o bem, em que os preços para as transacções *spot* são $p(0) := p_0$ e os associados às transacções nos mercados contingentes são $p(1) := (p_1, p_2)$.

1. Discuta as propriedades implícitas nas preferências atrás enunciadas, e as condições que deveria impôr sobre os seus parâmetros.

2. Defina, comentando, os problemas para cada consumidor.

3. Determine as funções procura óptimas. Comente os resultados obtidos.

4. Defina equilíbrio de Arrow-Debreu nesta economia. Discuta a sua intuição económica.

5. Determine os preços de equilíbrio. Comente os resultados obtidos.

2P5 Admita uma economia de troca na qual a árvore de tempo-incerteza tem dois períodos e dois estados da natureza. Há apenas um bem, cujas dotações exógenas são denotadas por $y(0) = y_0$ para o momento inicial e $y(1) := (y_1, y_2)$ para o momento terminal. Suponha que não há incerteza agregada, mas há incerteza ideossincrática, em relação às dotações. Há apenas dois consumidores com preferências simétricas e probabilidades subjectivas de ocorrência dos dois estados da natureza iguais, definidos sobre trajectórias de consumo $c := (c(0), c(1))$ em que $c(1) := (c_1, c_2)$. Admita que os consumidores têm preferências simétricas representadas por: uma função de utilidade intertemporalmente aditiva, com um factor de desconto intertemporal δ; por funções intratemporais do tipo von-Neumann-Morgenstern; e por funções de Bernoulli do tipo $u(c_j) = ac_j - \frac{b}{2}(c_j)^2$, com $a > 0$ e $b > 0$.

A estrutura de mercados e contratos é a de uma economia financeira: há apenas mercados *spot* para os bens, funcionando em cada período; há dois mercados financeiros, um mercado de acções e um de obrigações. As acções têm os pagamentos antecipados dados por (v_1, v_2), com $v_1 < 1 < v_2$, para os dois estados da natureza. A obrigação tem o valor facial de Suponha que nesta economia há não só expectativas correctas mas também racionais.

1. Defina e determine as características dos mercados financeiros quanto à arbitragem e completude.

2. Defina, comentando, os problemas para cada condumidor.

3. Resolva o problema dos consumidor representativos. Comente os resultados obtidos.

4. Defina o equilíbrio geral (de Radner) para esta economia. Discuta a sua intuição económica.

5. Determine os preços de equilíbrio para os activos financeiros. Comente os resultados obtidos.

6. Suponha que se introduzia, no momento inicial, um mercado de opções *call* tendo a acção como activo subjacente, com o momento de exercício no momento terminal e com o preço de exercício igual a K. Quais as consequências deste facto ? Qual o seu preço de equilíbrio ?

2P6 Admita uma economia dinâmica com incerteza, na qual a árvore de tempo-incerteza tem dois períodos e dois estados da natureza. Suponha uma economia de troca, com dotações exógenas dadas por $y(0) = y_0$ para o momento inicial e

$y(1) := (y_1, y_2)$ para o momento terminal, para os dois estados da natureza. Há apenas dois consumidores com incerteza ideossincrática em relação às dotações e com preferências simétricas e probabilidades subjectivas de ocorrência dos dois estados da natureza iguais, definidos sobre trajectórias de consumo $c := (c(0), c(1))$ em que $c(1) := (c_1, c_2)$. Admita que os consumidores têm preferências representadas por um função de utilidade intertemporalmente aditiva, com uma taxa de desconto intertemporal δ, e intratemporalmente do tipo von-Neumann-Morgenstern. A função de Bernoulli é $u(c_j) = \ln(c_j)$. Admita uma estrutura de mercados do tipo Arrow-Debreu, em que os preços para as transacções *spot* são $p(0) := p_0$ e os associados às transacções *forward*, para os dois estados da natureza, são $p(1) := (p_1, p_2)$. (Nota: Justifique sucintamente as suas respostas.)

1. Discuta as propriedades implícitas nas preferências atrás enunciadas. Construa, comentando, a restrição orçamental de cada consumidor. Formule o(s) problema(s) do(s) consumidore(s).
2. Determine as funções procura óptimas. Comente os resultados obtidos.
3. Suponha que não há incerteza ideossincrática e que as dotações agregadas são constantes ao longo do tempo e dos estados da natureza. Defina equilíbrio de Arrow-Debreu. Determine-o analiticamente.
4. Comente os resultados obtidos, assumindo que $y^1 = (0.5, 1, 0)$ e $y^2 = (0.5, 0, 1)$.

2P7 Admita uma economia dinâmica com incerteza, na qual a árvore de tempo-incerteza tem dois períodos e dois estados da natureza. Suponha uma economia de troca, com dotações exógenas dadas por $y(0) = y_0$ para o momento inicial e $y(1) := (y_1, y_2)$ para o momento terminal, para os dois estados da natureza. Há apenas dois consumidores com incerteza ideossincrática em relação às dotações e com preferências simétricas e probabilidades subjectivas de ocorrência dos dois estados da natureza iguais, definidos sobre trajectórias de consumo $c := (c(0), c(1))$ em que $c(1) := (c_1, c_2)$. Admita que os consumidores têm preferências representadas por um função de utilidade intertemporalmente aditiva, com uma taxa de desconto intertemporal δ, e intratemporalmente do tipo von-Neumann-Morgenstern. A função de Bernoulli é $u(c_j) = \ln(c_j)$.

Suponha a seguinte estrutura de contratos: há apenas mercados *spot* para os bens, funcionando em cada período; há dois mercados financeiros, um mercado de acções e um de derivados. As acções têm os pagamentos antecipados dados por $(v_1, 1)$, para os dois estados da natureza. O mercado de derivados consiste num mercado de opções europeias *call*, sobre aquelas acções, com preço de exercício dado por v_2. Admita que $1 > v_2 > v_1$. Suponha que nesta economia há não só expectativas correctas mas também racionais. (Nota: Justifique sucintamente as suas respostas.)

1. Construa a matriz dos pagamentos antecipados para o momento terminal. Construa e comente a restrição orçamental de cada consumidor. Formule o(s) problema(s) do(s) consumidore(s).

2. Determine as características dos mercados financeiros quanto à arbitragem e completude.

3. Resolva o problema do consumidor representativo, na presente economia financeira, após ter considerado as consequências da alínea anterior.

4. Suponha que não há incerteza ideossincrática e que as dotações agregadas são constantes ao longo do tempo e dos estados da natureza. Defina equilíbrio (de Radner) na economia com mercados financeiros. Determine-o analiticamente. Comente os resultados obtidos.

5. Suponha que se introduzia um mercado de obrigações com pagamentos terminais $(1, 1)$. Quais as consequências deste facto ? Qual o seu preço de equilíbrio ?

2P8 Admita uma economia dinâmica com incerteza, na qual a árvore de tempo-incerteza tem dois períodos e dois estados da natureza. Suponha uma economia de troca, com dotações agregadas exógenas. Nesta economia há apenas dois consumidores (indexados por $j = 1, 2$). Ambos os consumidores têm funções de utilidade intertemporalmente aditivas, com factores de desconto intertemporal $\beta^j := \frac{1}{1+\delta^j}$ diferentes, em que δ^j é a taxa de preferência pelo tempo para j. No entanto, há simetria das preferências intratemporais: as funções de Bernoulli são $u(c^j) = \ln(c^j)$ e as probabilidades subjectivas associadas as dois estados da natureza são comuns. Admita uma estrutura de mercados contingentes do tipo Arrow-Debreu.

1. Defina o equilíbrio geral de Arrow-Debreu no contexto desta economia. Determine-o analiticamente. Caracterize-o quanto à sua existência e unicidade.

2. Suponha que os agentes são também simétricos em relação aos seus factores de desconto intertemporal. Determine o equilíbrio Arrow-Debreu neste caso.

3. Comente os resultados obtidos nas duas alíneas anteriores, nomeadamente em relação à sua dependência em relação à simetria das impaciências e às hipóteses sobre os processos seguidos pelas dotações (individuais e agregadas).

2P9 Admita uma economia dinâmica com incerteza, na qual a árvore de tempo-incerteza tem dois períodos e dois estados da natureza. Suponha uma economia de troca, com dotações agregadas exógenas. Nesta economia há apenas dois consumidores (indexados por $j = 1, 2$). Ambos os consumidores têm funções de utilidade intertemporalmente aditivas, com factores de desconto intertemporal $\beta^j := \frac{1}{1+\delta^j}$ diferentes, em que δ^j é a taxa de preferência pelo tempo para j. No entanto, há simetria das preferências intratemporais: as funções de Bernoulli são $u(c^j) = \ln(c^j)$ e as probabilidades subjectivas associadas as dois estados da natureza são comuns.

A economia tem a seguinte estrutura de contratos: há apenas mercados *spot* para os bens, funcionando em cada período; há dois mercados financeiros, um mercado de acções e um de obrigações. As acções têm os pagamentos antecipados (v_1, v_2), com $v_2 > v_1$, para os dois estados da natureza. A obrigação é de cupão zero e tem o prazo de maturidade de um período, pagando 1 em ambos os estados da natureza. Suponha que nesta economia há não só expectativas correctas mas também racionais.

1. Defina e caracterize analiticamente (não o determine) o equilíbrio geral de Radner nesta economia. Faça um comentário breve sobre a intuição económica dos resultados que obteve.

2. Admita que os agentes são simétricos em relação aos seus factores de desconto e às probabilidades subjectivas associadas aos dois estados da natureza. Determine o equilíbrio geral de Radner da economia.

3. Discuta o comportamento da taxa de juro para diferentes hipóteses sobre os processos seguidos pelas dotações.

4. Suponha que em vez da acção há uma segunda obrigação também de cupão zero e de maturidade igual a 1 período, mas com o valor facial de 1.5. Para simplificar, admita que: as dotações são $y^1 = (1/2, 1, 0)$ e $y^2 = (1/2, 0, 1)$ para os agentes 1 e 2, respectivamente; os agentes são simétricos em relação às preferências e em relação às probabilidades subjectivas e que $\pi = 1/4$. Determine o equilíbrio desta economia e caracterize-o quanto à existência e unicidade. Faça um comentário breve sobre a intuição económica dos resultados que obteve.

2P10 Suponha uma economia financeira com a matriz de pagamentos dada por

$$V = (V(0), V(1))^T = \begin{bmatrix} -1 & -\eta \\ 0.5 & 1 \\ \nu & 1 \end{bmatrix}$$

em que $\eta = \frac{1}{1+r}$ com $r > 0$ e ν pode assumir qualquer valor (real). (Justifique e forneça uma intuição para todos os resultados que obtiver)

1. Em que condições teremos ausência de oportunidades de arbitragem.

2. Em que condições os mercados serão completos.

3. Determine, impondo condições para que tal seja possível, os preços dos estados da natureza.

4. Determine, impondo condições para que tal seja possível, os valores admissíveis para os preços de mercado dos activos contigentes de tipo Arrow-Debreu. Descreva a estratégia de transacções implícita.

2P11 Suponha uma economia financeira com dois períodos e S estados da natureza e em que há K activos financeiros. Suponha que um consumidor que tem um problema *standard*: o consumidor determina uma sequência óptima de consumo $c = \{c(t) : t = 0, 1\}$ e uma estratégia de transacções θ tal que maximiza uma função utilidade intertemporal aditiva em que a utilidade instantânea é de tipo von-Neumann Morgenstern, em que a função de utilidade de Bernoulli logarítmica e tem uma dotação exógena dada por $y = \{y(t) : t = 0, 1\}$. Todos variáveis são processos estocásticos adaptados.

1. Suponha que o agente tem uma dotação inicial dada por uma carteira de títulos representada por $\theta(0)$. Quais as estratégias óptimas de consumo e de transacções de títulos ? Interprete os resultados que obteve.

2. Suponha que não há uma dotação inicial. Mas suponha que há um mercado spot para os títulos a funcionar em $t = 1$ e que o agente pretende legar uma carteira $\theta(2)$. Quais as estartégias óptimas de consumo e de transacções de títulos ? Interprete os resultados que obteve.

2P12 Suponha uma economia financeira com dois períodos e 2 estados da natureza e em que há $K = 2$ activos financeiros. Suponha que o consumidor representativo tem um problema *standard*: o consumidor determina uma sequência óptima de consumo $c = \{c(t) : t = 0, 1\}$ e uma estratégia de transacções θ tal que maximiza uma função utilidade intertemporal aditiva em que a utilidade instantânea é de tipo von-Neumann Morgenstern, em que a função de utilidade de Bernoulli logarítmica e tem uma dotação exógena dada por $y = \{y(t) : t = 0, 1\}$. Todos variáveis são processos estocásticos adaptados. Suponha que o agente não pode ter posições a descoberto no título 1.

1. Especifique o seu problema. Justifique.

2. Quais as estratégias óptimas de consumo e de transacções de títulos ? Interprete os resultados que obteve.

3. Compare os seus resultados com o caso em que se podem tomar posições a descoberto em qualquer título.

4. Discuta as consequências para o equilíbrio geral desta economia.

2P13 Suponha uma economia financeira em que a árvore de tempo-incerteza tem dois períodos e dois estados da natureza, em que há ausência de oportunidades de arbitragem, não há incerteza ideossincrática e os agentes são homogéneos (i.e., são simétricos em relação ao comportamento, informação e dotações). Estes têm uma função de utilidade logaritmica e a sua taxa de preferência pelo tempo é de 3%. O processo para as dotações é $y = (y(0), y(1))^T = (1, 0.9, 1.1)^T$ e a matriz dos pagamentos líquidos para os dois activos financeiros existentes, antecipada perfeitamente, é

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1.02} \\ 0.8 & 1 \\ 1.2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determine o índice de Sharpe para o activo com risco.
2. Verifique se a volatilidade da taxa marginal de substituição obedece aos limites de Hansen-Jagannathan.

Tempo discreto: T períodos

Questões de desenvolvimento

TP1 Aborde sucintamente os seguintes temas:

1. Filtragem, processo estocástico adaptado a uma filtragem. Dê um exemplo simples de uma filtragem e de dois processos estocásticos, um deles adptado e outro não adptado.
2. Uma sequência de valores esperados condicionados em relação a uma filtragem definem um processo estocástico.
3. Ausência de oportunidades de arbitragem e existência de um deflactor para os preços dos estados.
4. Existência de uma medida martingala equivalente quando se verifica ausência de oportunidades de arbitragem. Significado da medida e comparação com a medida de probabilidade primitiva.
5. Valorização de um activo financeiro na ausência de oportunidades de arbitragem e valorização em equilíbrio (suponha que os agentes são homogéneos).
6. A possibilidade de transaccionar várias vezes um número relativamente limitado de títulos completa o mercado.

Exercícios

TP2 Suponha que a estrutura de informação é dada pelo espaço $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ em que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ e a $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t = 0, 1, 2\}$ em que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}\}$. Para um processo $X(t)$ adaptado em relação à filtragem, temos as probabilidades: $P(X(1, \{\omega_1, \omega_2\})) = 0.6$ $P(X(1, \{\omega_3, \omega_4\})) = 0.4$, $P[X(2, w = \omega_1) \mid X(1, \{\omega_1, \omega_2\})] = 0.6$, $P[X(2, w = \omega_2) \mid X(1, \{\omega_1, \omega_2\})] = 0.4$, $P[X(2, w = \omega_3) \mid X(1, \{\omega_3, \omega_4\})] = 0.6$ e $P[X(2, w = \omega_4) \mid X(1, \{\omega_3, \omega_4\})] = 0.4$. Suponha que num mercado financeiro há dois activos, $j = 1, 2$, em que os pagamentos são denotados por $V^j(t)$ e os preços por $q^j(t)$, em relação ao fim do período $t = 0, 1, 2$. Admite-se que ño momento terminal não há transações. Verificam-se os seguintes valores: para os pagamentos $V^1(1) = \{0.05, -0.05\}$, $V^2(1) = \{-0.1, 0.1\}$, $V^1(2) = \{0.2, 0, 0, 0.1\}$ e $V^2(2) = \{0, 0.05, 0.15, 0\}$ e para os preços de mercado $q^1(0) = q^2(0) = 1$, $q^1(1) = \{1.05, 0.95\}$ e $q^2(1) = \{0.9, 1.1\}$ Estes processos são adaptados em relação à filtragem $\mathbb{F}$.

1. Caracterize o mercado quanto à existência de oportunidades de arbitragem.

2. Caracterize o mercado quanto à completude.

3. Determine o deflactor dos preços dos estados.

4. Suponha que em cada período há uma obrigação de curto prazo de cupão zero (i.e., que é emitida num período e tem um pagamento igual a 1 no período subsequente). Observam-se as taxas de rendimento $r(0) = 0.1$ e $r(1) = 0.15$. Determine a medida martingala equivalente. Forneça uma intuição para os resultados que obteve.

5. Suponha que não se podem efectuar transacções no período $t = 1$. Caracterize o mercado quanto à completude, comparando com os resultados que obteve na alínea b). Forneça uma intuição.

TP3 Suponha que a informação numa economia financeira é dada por uma árvore de tempo-incerteza com 3 períodos $\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$ e em que há dois ramos a partir de cada nó $\{u, d\}$. Na economia existem dois activos financeiros, uma obrigação e uma acção. Em qualquer nó não terminal, a probabilidade de subida é de 70% e a de descida é de 30%. Os pagamentos de rendimentos são apenas feitos no nó terminal. A obrigação tem um valor facial igual a 1 e a acção tem os pagamentos antecipados dados por $V(2) = \{V(uu), V(ud), V(du), V(dd)\} = \{25, 15, 15, 9\}$. Admite-se que a taxa de juro de curto prazo para a obrigação é constante e igual a 10% e que o processo estocástico para o preço da acção é dado por $S(0) = 16$, $S(1) = \{S(u), S(d)\} = \{20, 12\}$.

1. Determine o processo para o deflactor dos preços dos estados.

2. Determine a medida martingala equivalente.

3. Determine a derivada de Radon-Nykodim e a densidade associada à relação entre os preços dos estados da natureza e a medida martingala equivalente.

4. Suponha que se tem um activo contingente Arrow-Debreu que dá uma unidade monetária se ocorrer o estado uu da natureza em $t = 2$ e zero nos restantes momentos e estados da natureza. Determine uma estratégia de transacções replicante, com a acção e a obrigação. Qual o processo para o custo desta estratégia replicante. Comente os resultados obtidos.

5. Suponha que se tem uma opção *call*, que pode ser exercida no momento $t = 2$ com o preço de exercício igual a 10. Determine uma estratégia de transacções replicante, com a acção e a obrigação. Qual o processo para o custo desta estratégia replicante. Comente os resultados obtidos.

TP4 Suponha que a informação numa economia financeira é dada por uma árvore de tempo-incerteza com 3 períodos $\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$. A árvore tem dois ramos a partir de cada nó $\{u, d\}$, com probabilidades condicionadas de, respectivamente, 60% e 40%, constantes em relação ao tempo. Suponha que na economia os agentes são homogéneos e que os mercados estão em equilíbrio e que há ausência de oportunidades de arbitragem nos mercados financeiros. Cada agente recebe dotações, com o processo adaptado $y(0) = 6$, $y(1) = \{8, 5\}$, $y(2) = \{10, 6, 6, 4\}$. Os agentes têm uma função de utilidade intertemporal de tipo von-Neumann Morgenstern, têm uma taxa de desconto intertemporal de 5% e têm funções de utilidade de Bernoulli do tipo $u(c(t, \omega)) = \ln(c(t, \omega)$. Os agentes detêm uma acção até ao último período, e admite-se que têm o processo (adaptado) antecipado para os divdendos dado por $V(1) = \{1, 0.5\}$ e $V(2) = \{2, 1.4, 1.4, 1\}$.

1. determine o processo para a densidade dos preços (*price kernel*)

2. determine o processo de preços de equilíbrio para a acção considerada

3. comente os cálculos que fez e os resultados que obteve.

TP5 Suponha que a informação numa economia financeira é dada por uma árvore de tempo-incerteza com 3 períodos $\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$ e em que há dois ramos a partir de cada nó $\{u, d\}$. Na economia existem dois activos financeiros, uma obrigação e uma acção. Em qualquer nó não terminal, a probabilidade de subida é de 60% e a de descida é de 40%. Os pagamentos de rendimentos são apenas feitos no nó terminal. A obrigação tem um valor facial igual a 1 e a acção tem os pagamentos antecipados dados por $V(2) = \{V(uu), V(ud), V(du), V(dd)\} = \{20, 14, 14, 8\}$. Admite-se que a taxa de juro de curto prazo para a obrigação é constante e igual a 8% e que o processo estocástico para o preço da acção é dado por $S(0) = 8$, $S(1) = \{S(u), S(d)\} = \{10, 6\}$.

1. Determine o processo para o deflactor dos preços dos estados.
2. Determine a medida martingala equivalente.
3. Comente os resultados obtidos.

TP6 Suponha uma economia com multiperíodos com incerteza e em tempo discreto, em que $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ e com o espaço de probabilidades $(\Omega; \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ em que $\dim(\Omega) = S$. Suponha que há N acções, $i = 1, \ldots, N$ em que os seus pagamentos (dividendos) e as suas cotações, no momento t, são denotados, respectivamente, por $D_i(t)$ e $S_i(t)$ e, M obrigações de cupão zero, em que o preço, em t da obrigação que matura em $t+j$ é $B_j(t)$ (note que $B_0(t) = 1$). O problema do agente representativo consiste em maximizar a função de utilidade intertemporal $E_0\left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c(t))\right]$ em que $0 < \beta < 1$, sujeita à restrição $\sum_{j=1}^{M} \theta_j^0(t+1)B_j(t) + \sum_{i=1}^{N} \theta_i^1(t+1)q_i(t) + c(t) = e(t) + \sum_{j=0}^{M-1} \theta_j^0(t)B_j(t) + \sum_{i=1}^{N} \theta_i^1(t)(q_i(t) + D_i(t))$ em que $e(t)$ representa uma dotação exógena. Todos os processos são adaptados em relação à filtragem $\mathbb{F}$, com a excepção de θ^0 e θ^1 são que são processos previsíveis.

1. Determine as condições de arbitragem, de primeira ordem, para os investimentos em acções e obrigações.
2. Seja $R_i(t+1) = \frac{q_i(t+1)+D_i(t+1)}{q_i(t)}$ a taxa de rendimento para a acção i e observe que $\frac{B_{j-1}(t+1)}{B_j(t)} = \frac{1}{B_1(t)} = R_1(t)$. Determine o excesso de rendimento para a acção i, i.e., $E_t[R_i(t+1)] - R_1(t)$. Forneça uma intuição económica.

TP7 Suponha uma economia com multiperíodos com incerteza e em tempo discreto, em que $\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$ em que $\dim(\Omega) = 4$ e $\mathcal{F}_1$ tem como partição mais fina $\{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$. Suponha uma economia em que existem contratos e mercados financeiros. Determine em que condições não existem oportunidades de arbitragem e há completude com as seguintes estruturas institucionais:

1. os mercados funcionam em todas as datas e os pagamentos são apenas feitos nas datas seguintes;
2. os mercados funcionam apenas em $t = 0$, há activos que pagam em $t = 1$ e outros que pagam em $t = 2$;
3. os mercados funcionam em $t = 0$ e $t = 1$. No primeiro caso há activos que pagam em todos os períodos subsequentes.

Tempo contínuo

Questões de desenvolvimento

TC1 Aborde sucintamente os seguintes temas:

1. Movimento Browniano. Definição e propriedades.

2. Integral de Itô. Definição e propriedades. Explique sucintamente porque razão o integral $\int_s^t f(t)dB_t(\omega)$ não é um integral clássico (ou de Riemann).

3. Relação entre integral de Itô e integral estocástico.

4. Apresente o lema de Itô. Discuta a sua utilidade para a análise financeira em tempo contínuo.

5. Apresente e discuta a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

6. Existência de uma medida martingala equivalente quando se verifica ausência de oportunidades de arbitragem. Significado da medida e comparação com a medida de probabilidade primitiva.

7. Explique o processo de determinação de medidas martingalas equivalentes e a sua utilidade para a valorização de activos financeiros.

Exercícios

TC2 Suponha, que tem um activo sem risco e uma acção que paga dividendos. Admita que os processos para o valor da obrigação, para o preço da acção e para os dividendos são

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= r\beta(t)dt \\ dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_t \\ dD(t) &= \delta dt \end{aligned}$$

em que r, μ, σ, δ e σ_d são constantes não negativas. Observe que o valor actualizado em t do valor de uma acção em $T > t$ é $\exp\{-(T-t)r\}S_T + \int_t^T \exp\{-(T-t)r\}dD(t)$.

1. Exprima o valor da acção em t usando uma medida martingala equivalente;

2. Determine a processo para o risco de mercado usando o teorema de Girsanov;

3. Admita que tem uma opção *call* com data de exercício $T > t$. Determine a equação de valorização análoga à equação de Black-Scholes.

TC3 Suponha, que tem um activo sem risco e uma acção que não paga dividendos. Admita que os processos para o valor da obrigação e para o preço da acção são

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= r\beta(t)dt \\ dS(t) &= (a + bS(t))dt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

em que r, a, b e σ, são constantes não negativas.

1. Exprima o valor da acção em t usando uma medida martingala equivalente;

2. Determine a processo para o risco de mercado usando o teorema de Girsanov;

3. Admita que tem uma opção *call* com data de exercício $T > t$. Determine a equação de valorização análoga à equação de Black-Scholes.